Session de 1991
Concours d'admission
MATHÉMATIQUES
Option Générale
Durée : 4 heures - Coefficient : 4

EXERCICE 1 (5 Points)

On note E l'espace vectoriel réel formé de la fonction nulle et des fonctions polynômes réelles de degré inférieur ou égal à n, où n est un entier naturel, fixé, avec $n \geq 2$.

On considère la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ d'éléments de E définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} P_0(x) = 1 \quad , \quad P_1(x) = x \\ \forall k \in [2, n], \quad P_k(x) = \dfrac{x(x-k)^{k-1}}{k!} \end{cases}$$

1°/ Montrer que $(P_0, P_1, ... P_n)$ est une base de E.

2°/ Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in [1, n]$, on a : $P'_k(x+1) = P_{k-1}(x)$. (P'_k désignant la fonction dérivée de la fonction P_k).

3°/ Soit f l'application qui à tout élément P de E associe la fonction Q définie sur $\mathbb{R}$ par : $Q(x) = P(x) - P'(x+1)$

i) Montrer que f est un endomorphisme de E et préciser sa matrice A relativement à la base $(P_0, P_1, ..., P_n)$

ii) En déduire que f est un automorphisme de E

iii) Déterminer A^{-1}.

4°/ On suppose dans cette question $n = 3$.

i) Déterminer l'unique fonction polynôme P telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ P(x) - P'(x+1) = x^3$$

ii) Déterminer de même l'unique fonction polynôme R telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ R(x) - 2R'(x+1) + R''(x+2) = x^3$$

EXERCICE 2 (5 Points)

On rappelle que si f est une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle I, la $k^{ème}$ fonction dérivée de f se note $f^{(k)}$, avec la convention : $f^{(0)} = f$.

On rappelle d'autre part que si u et v sont deux fonctions k fois dérivables sur un intervalle I, alors le produit u.v est une fonction k fois dérivable sur I avec :

$$\forall x \in I, \quad (u.v)^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i u^{(i)}(x) v^{(k-i)}(x) \ ; \text{ où } C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!} \quad \text{(formule de Leibniz).}$$

1°/ Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in]0, 1[$ on pose :

$$\varphi_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

i) Dire pourquoi f est indéfiniment dérivable sur $]0, 1[$ et déterminer les dérivées successives de f.

ii) Exprimer $\varphi_n(x) - f(x)$ et en déduire : $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x)$.

iii) Plus généralement, soit k fixé tel que $0 \leq k \leq n$, à l'aide de la formule de Leibniz donner une expression de : $\varphi_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)$. En déduire $\lim_{n \to \infty} \left(\varphi_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)\right)$ et la formule :

$$\forall x \in]0, 1[, \ \forall k \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) ..... (n-k+1) x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

Tournez la page S.V.P.

2°/ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est définie par :

$$\begin{cases} P(X=0) = 1 - \dfrac{p.\lambda}{1-p} \\ \forall\ k \in \mathbb{N}^*,\quad P(X=k) = \lambda.p^k \end{cases}$$

où λ et p sont deux nombres strictement positifs fixés tels que $p < 1$ et $\lambda < \dfrac{1}{p} - 1$.

i) Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

ii) Déterminer l'espérance et la variance de X.

3°/ On effectue un nombre aléatoire de lancers d'une pièce équilibrée, le nombre de lancers suivant la loi de X. On note Y le nombre aléatoire de "Pile" obtenus.

i) Pour k et i appartenant à $\mathbb{N}$, calculer $P(Y=k/X=i)$; (probabilité de l'événement Y=k, sachant que l'événement X=i est réalisé). En déduire la loi du couple (X,Y).

ii) Montrer que pour $k \geq 1$, on a : $P(Y=k) = \dfrac{2\,p^k.\lambda}{(2-p)^{k+1}}$

PROBLEME (10 Points)

PARTIE 1

1°/ Montrer que pour tout réel x, il existe un unique entier relatif n tel que : $2n - 1 < x \leq 2n + 1$;
Cet entier sera noté n(x).

2°/ Soit alors f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad f(x) = [x - 2\,n(x)][1 - |x - 2\,n(x)|]$$

(On a donc, par exemple : si $x \in]-1, 1]$, $f(x) = x(1 - |x|)$; si $x \in]1, 3]$, $f(x) = (x-2)(1 - |x-2|)$, ...)

i) Etudier brièvement la restriction de f à l'intervalle $]-1, 1]$.

ii) Vérifier que f est périodique de période 2. (C'est à dire, montrer que l'on a : $\forall\ x \in \mathbb{R}, f(x+2) = f(x)$).

iii) En déduire la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $]-1, 5]$.

3°/ Montrer que f est continue à gauche et à droite en 1. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$

4°/ Montrer que f est dérivable en 0 et en 1, préciser les valeurs de f'(0) et f'(1). En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

PARTIE 2

1°/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ (f a été définie dans la première partie)

i) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

ii) g ainsi prolongée, est - elle dérivable en 0 ?

2°/ Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_p = \displaystyle\int_p^{p+1} g(x).dx$

i) Calculer I_0, I_1.

ii) Vérifier que l'on a : $\forall\ p \in \mathbb{N}^*,\ I_p = (-1)^p \displaystyle\int_0^1 \frac{x(1-x)}{x+p}\,dx$.

iii) Montrer que l'on a : $\forall\ p \in \mathbb{N}^*, |I_p| > \dfrac{1}{6(p+1)}$. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_0^{+\infty} |I_p|$.

iv) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k$. Montrer que les suites extraites $(J_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(J_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et de sens contraires. En déduire la convergence de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

v) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x).dx$ est convergente.

3°/ En remarquant que $x^2 - x = (x+p)(x-p-1) + p(p+1)$, calculer explicitement I_p pour $p \in \mathbb{N}$.

FIN